

no card

## COMPLEMENTS A L'ETUDE DE L'EFFET KIRKENDALL SELON LES EQUATIONS DE DARKEN

JEAN-FRANÇOIS CORNET

DMECN/DECPu/SMPuA, France

(Received 16 October 1972; in revised form 23 December 1973)

**Résumé**—Un développement de l'analyse des équations de Darken proposée dans un précédent travail[1] conduit à énoncer les propriétés complémentaires suivantes:

(1) L'abscisse "réduite"  $\lambda = X/\sqrt{t}$  d'un plan cristallin ne dépend que de son abscisse initiale "réduite"  $\lambda_0 = X_0/\sqrt{t}$ .

En d'autres termes, si l'on pose  $\delta = (X - X_0)/\sqrt{t} = \lambda - \lambda_0$  (déplacement réduit) les trois fonctions:  $\delta(\lambda)$ ,  $\delta(\lambda_0)$  et  $\lambda(\lambda_0)$  sont indépendantes du temps.

(2) Une construction graphique très simple permet de mesurer la vitesse des plans cristallins à partir de la courbe donnant à l'instant  $t$  les déplacements en fonction de l'abscisse initiale.

Une première confirmation de ces propriétés est apportée par les travaux de Monti[3] dans la système Au-Ag.

**Abstract**—A development of the analysis of Darken's equations proposed in a previous work has led to the following additional properties:

(1) The total displacement  $\delta = (X - X_0)/\sqrt{t}$  of an atomic plane between time "zero" and "t" depends only on the ratio  $\lambda_0 = X_0/\sqrt{t}$ , where  $X_0$  is its initial position.

(2) A simple graphical construction on the curve of the displacement vs initial position  $X_0$  at any time  $t$  allows the determination of the velocity of the atomic planes.

The first experimental confirmation of the above properties has been established by Monti in the Au-Ag system.

### 1. INTRODUCTION

Dans un couple de diffusion binaire, la forme de l'équation de Fick permet d'exprimer la concentration  $N_A$  en fonction de la seule variable réduite  $\lambda = X/\sqrt{t}$ .

Si les coefficients de diffusion intrinsèques  $D_A$  et  $D_B$  sont différents, il apparaît dans le couple un phénomène de déplacement des plans cristallins, par création et disparition de certains d'entre eux: c'est l'effet Kirkendall.

En particulier, un repère inerte placé à l'instant zéro dans le couple va se déplacer au cours de l'évolution de la concentration  $N_A$ . Son abscisse  $X$ , mesurée par rapport à l'interface de Matano, va varier avec le temps et la loi de déplacement sera différente selon son abscisse initiale  $X_0$ .

Nous avons montré[1] que la position des repères est régie par deux équations aux dérivées partielles déduites des équations de Darken...

$$\frac{\partial X}{\partial \sqrt{t}} = F \quad (1)$$

$$\frac{\partial X}{\partial X_0} = \frac{X - F \sqrt{t}}{X_0} \quad (2)$$

où la fonction

$$F = 2(D_A - D_B) \frac{dN_A}{d\lambda}$$

joue un rôle prépondérant puisqu'elle permet de déterminer le plan de Kirkendall par l'équation  $F = \lambda$ .

Nous nous proposons d'étudier la fonction  $\Delta = X - X_0$ . Les deux variables sont  $\sqrt{t}$  et  $X_0$ .

Nous représenterons  $\Delta(\sqrt{t}, X)$  dans l'espace par une surface.

Nous verrons que cette surface prend une forme très simple (faisceau de droites passant par l'origine) et nous en déduisons la propriété suivante, explicitée Fig. 1:

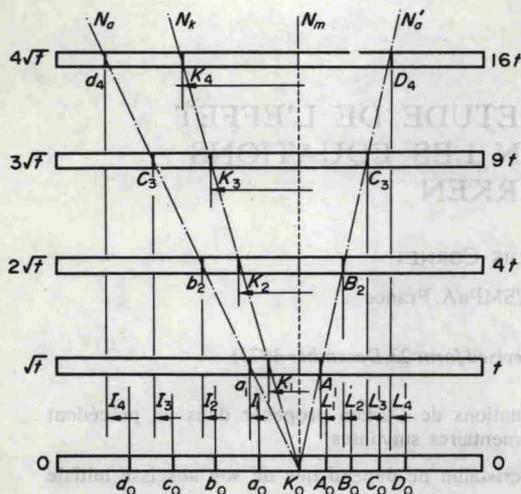


Fig. 1. Les déplacements  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_n$  de  $n$  repères distincts, mesurés à des instants respectifs  $t_1, t_2, \dots, t_n$  où leur concentration  $N_A$  est la même sont proportionnels aux nombres  $\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \dots, \sqrt{t_n}$ , c'est-à-dire:

$$\frac{\Delta_1}{\sqrt{t_1}} = \frac{\Delta_2}{\sqrt{t_2}} = \dots = \frac{\Delta_n}{\sqrt{t_n}} = \Phi(N_A).$$

La constante de proportionnalité  $\Phi(N_A)$

$$\Delta n = \Phi(N_A) \sqrt{t_n}$$

ne dépend que de  $N_A$ .

“les déplacements  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  de  $n$  repères distincts, mesurés à des instants respectifs  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , où leur concentration  $N_A$  est la même, sont proportionnels aux nombres  $\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \dots, \sqrt{t_n}$ , c'est à dire:

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{t_1}} = \frac{\delta_2}{\sqrt{t_2}} = \dots = \frac{\delta_n}{\sqrt{t_n}} = \delta(N_A).$$

Le coefficient de proportionnalité  $\delta$  ne dépendant que de la concentration  $N_A$ .

Ce résultat justifie *a posteriori* les calculs effectués par Levasseur et Philibert [2], basés sur l'hypothèse que les plans cristallins obéissent à une loi de la forme:

$$X = X_0 + \Phi \left( \frac{X}{\sqrt{t}} \right) \sqrt{t}.$$

Il est important de souligner que la quantité  $\Phi$  ne dépend que de la concentration  $N_A$  et qu'elle n'est pas constante pour un repère donné ( $X_0 = \text{constante}$ ). Ce résultat n'implique nullement l'existence d'un “temps d'induction” dans le déplacement d'un plan cristallin. Les relations empiriques du type  $X = k \sqrt{t - t_0}$  ou  $X = X_1 + k \sqrt{t}$

sont grossièrement fausses hors du plan de Kirkendall, comme nous pourrions le mettre en évidence dans quelques exemples numériques.

## 2. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES DISPLACEMENTS

Pour faciliter l'écriture des calculs que nous allons développer, nous poserons:

$$u = \sqrt{t}$$

$$\Delta = X - X_0$$

$$p = \frac{\partial \Delta}{\partial u} = \frac{\partial (X - X_0)}{\partial (\sqrt{t})}$$

$$q = \frac{\partial \Delta}{\partial X_0}$$

Nous nous proposons d'écrire l'équation aux dérivées partielles caractérisant la fonction à deux variables  $\Delta(u, X_0)$  sous la forme  $\tau(\Delta, u, X_0, p, q) = 0$ .

Pour cela, nous transformerons les équations (1) et (2) pour n'y faire apparaître que les variables ci-dessus.

$$\text{Soit } q = \frac{\partial \Delta}{\partial X_0} = \frac{\partial (X - X_0)}{\partial X_0} = \frac{\partial X}{\partial X_0} - 1$$

confronté à (2) donne:

$$q = \frac{X - F \sqrt{t}}{X_0} - 1 = \frac{X - X_0 - F \sqrt{t}}{X_0} = \frac{\Delta - Fu}{X_0}.$$

D'autre part, on déduit de (1):

$$p = \frac{\partial \Delta}{\partial u} = \frac{\partial (X - X_0)}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} = F.$$

Nous aboutissons donc au système:

$$p = F \quad (3)$$

$$q = \frac{\Delta - Fu}{X_0} \quad (4)$$

L'élimination de  $F$  entre les équations (3) et (4) donne l'équation très simple:

$$pu + qX_0 - \Delta = 0 \quad (5)$$

dont les courbes caractéristiques sont un faisceau de droites passant par l'origine (cône) (Fig. 2).

En effet considérons la surface  $\Delta(u, X_0)$ .

En tout point  $M$  un déplacement infinitésimal  $dM$  ( $du, d\Delta, dX_0$ ) s'écrit  $d\Delta = p du + q dX_0$ , s'il est effectué sur la surface. La normale  $na$  pour coefficients directeurs les nombres  $p, q, -1$  puisque  $dM, n = 0$ .

L'équation (5) peut donc s'écrire:  $OM, n = 0$ .

Le vecteur  $OM$  est contenu dans le plan tangent

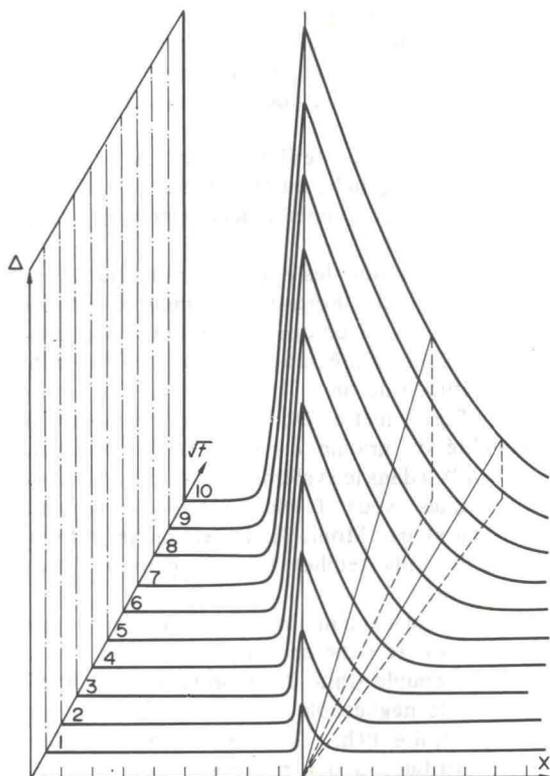


Fig. 2. Les courbes caractéristiques

$$pu + qX_0 - \Delta = 0 \text{ c'est-à-dire}$$

$$F\sqrt{t} + \frac{\Delta - F\sqrt{t}}{X_0} - \Delta = 0$$

forment un faisceau de droites passant par l'origine.

en  $M$  à la surface, et ceci quel que soit  $M$ , cela s'écrit:

$$\frac{du}{u} = \frac{dX_0}{X_0} = \frac{d\Delta}{\Delta}$$

soit, après intégration:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= k_1 u \\ X_0 &= k_2 u \end{aligned} \right\} (5 \text{ bis}).$$

L'équation (5 bis) est l'équation d'une droite dépendant de deux paramètres,  $k_1$  et  $k_2$ . La solution de l'équation (5) est une surface contenant cette droite, définie par:  $k_1 = \Phi(k_2)$  condition pour que la droite engendre une surface et non un volume.

La forme générale de l'équation est donc:

$$\Delta = u \Phi \left( \frac{X_0}{u} \right)$$

ou:

$$\frac{X - X_0}{\sqrt{t}} = \Phi \left( \frac{X_0}{\sqrt{t}} \right). \quad (6)$$

Ce résultat est important: la courbe

$$\frac{X - X_0}{\sqrt{t}} \text{ fonction de } \frac{X_0}{\sqrt{t}}$$

est indépendante du temps, exactement de la même façon que la courbe  $N_A$  ( $\lambda = X/\sqrt{t}$ ).

La propriété (6) peut s'écrire:

$$\frac{X - X_0}{\sqrt{t}} = \varphi \left( \frac{X}{\sqrt{t}} \right).$$

En effet, toute fonction  $\Phi(X_0/\sqrt{t})$  peut être considéré comme fonction  $\varphi(X/\sqrt{t})$  et ceci résulte également de la forme de l'équation (5) (voir Annexe 1).

Les fonctions  $\Phi$  et  $\varphi$  ne sont pas identiques bien qu'elles prennent les mêmes valeurs quand les variables  $\lambda$  et  $\lambda_0$  se correspondent:

$$\lambda - \lambda_0 = \Phi(\lambda_0) = \varphi(\lambda).$$

Nous montrerons en Annexe 2 que:

$$d\lambda = (1 + q) d\lambda_0 = \frac{\lambda - F}{\lambda_0} d\lambda_0. \quad (7)$$

De façon plus explicite, ceci implique que le " $\lambda$ " d'un repère ne dépend que de son " $\lambda_0$ " (son abscisse  $X$  à l'instant  $t$ , divisé  $\sqrt{t}$ , ne dépend que de son abscisse initiale  $X_0$ , divisée également par  $\sqrt{t}$ ).

En d'autres termes, la concentration  $N_A$  d'un plan cristallin d'abscisse  $X$  à l'instant  $t$  ne dépend que de la concentration  $N'_A$  qui serait la sienne si son abscisse était restée égale à  $X_0$ .

$$N_A \left( \frac{X}{\sqrt{t}} \right) \text{ ne dépend que de } N'_A \left( \frac{X_0}{\sqrt{t}} \right).$$

Les graphes donnant:

$$\delta = \frac{X - X_0}{\sqrt{t}} \text{ en fonction de } \lambda_0 = \frac{X_0}{\sqrt{t}}$$

$$\delta \text{ en fonction de } \lambda$$

$$\lambda \text{ en fonction de } \lambda_0$$

seront donc les mêmes quelle que soit la durée du recuit de diffusion.

La connaissance de la répartition des déplacements à un instant  $t_1$ ,  $\Delta(X_0, t_1)$  permet de prévoir leur évolution à n'importe quel instant  $t_2$ .

Nous n'avons fait aucune hypothèse sur la variation des paramètres gouvernant la diffusion.

Nos conclusions se déduisent simplement de la forme des équations de Darken, et leur validité pratique est soumise aux mêmes conditions que celle des équations de Darken (nombre de sites constant par unité de volume).

### 3. CALCUL DE LA FONCTION $\phi(\lambda)$

Le calcul consiste à résoudre l'équation différentielle (7) avec pour condition aux limites:

$$\lambda_0 = 0 \text{ Si, } \lambda = F(\lambda)$$

et

$$\lambda_0 = \lambda \text{ lorsque } \lambda \rightarrow \pm \infty \text{ (car } F \rightarrow 0).$$

La solution générale est de la forme:

$$\lambda_0 = K \exp \left[ - \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda - F} \right]$$

et

$$\phi = \lambda - K \exp \left[ - \int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda - F} \right]. \quad (8)$$

Le choix de la constante d'intégration  $K$  dépend de celui de la borne d'intégration  $\lambda_1$ .

Pratiquement l'intégration se fera en deux parties:

(1) Sur l'intervalle  $[-\infty, \lambda_{k_1}]$ ,  $\lambda_1$  est la plus petite des solutions à l'équation  $F = \lambda$  (ceci dans le cas où l'équation  $F = \lambda$  admet plusieurs solutions  $\lambda_{k_1}$ ,  $\lambda_{k_2}$ , ...,  $\lambda_{k_n}$ . Pour  $\lambda_{k_1} < \lambda < \lambda_{k_n}$ , on a toujours  $\lambda_0 = 0$  [1] et dans cet intervalle l'intégration n'est pas permise.

La borne  $\lambda$  sera prise assez grande pour que le déplacement  $\lambda_1 - \lambda_0$  soit négligeable; la solution sera alors, en posant  $\lambda_1 = \lambda_- = K$

$$\lambda_0 = \lambda_- \exp \left[ - \int_{\lambda_-}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda - F} \right], \text{ sur } [-\infty, \lambda_{k_1}]$$

lorsque  $\lambda \rightarrow \lambda_{k_1}$ ,  $F(\lambda) \rightarrow \lambda_{k_1}$  et l'intégrale diverge,  $\lambda_0$  tend vers zéro.

La valeur absolue et le signe—devant l'exponentielle se justifient, car il faut que  $\lambda_0$  tende vers zéro quand  $\lambda - F \rightarrow 0$  (plan de Kirkendall)

(2) Intervalle  $[\lambda_{k_n}, +\infty]$ ,  $\lambda_{k_n}$  désigne la plus grande des solutions à l'équation  $\lambda - F = 0$ .

Alors:

$$\lambda_0 = \lambda_+ \exp \left[ \int_{\lambda_+}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda - F} \right]$$

$\lambda_+$  a été choisi en sorte que  $\lambda_+ - \lambda_0 \approx 0$ .

La valeur absolue de  $\lambda - F$  et le signe plus se justifient car il faut que l'exponentielle s'annule quand  $\lambda \rightarrow \lambda_{k_n}$ .

Une étude mathématique plus approfondie permettrait de mieux définir la correspondance  $\lambda_0 \rightarrow \lambda$ , au voisinage du plan de Kirkendall. Nous avons déjà pu mettre en évidence la discontinuité de la dérivée première.

Le calcul des pentes limites  $[d\lambda_0/d\lambda]_+$  et  $[d\lambda/d\lambda]_-$  à droite et à gauche du ou des plans de Kirkendall s'avère beaucoup plus délicat et nous n'y sommes par parvenus.

Toutefois, tous les exemples numériques traités par programmes Fortran confirment les propriétés énoncées ici, et ce quelle que soit la méthode de calcul choisie: intégration numérique directe de (8) ou méthode de tir.

La Fig. 3, met en évidence une vérification de la stabilité du graphe  $\delta = (X - X_0)/\sqrt{t}$  fonction de  $\lambda = X/\sqrt{t}$  dans le système Au-Ag. Les mesures ont été faites sous faible pression hydrostatique (100 bars) par Monti[3]; la technique utilisée est celle des mille feuilles. C'est l'argent qui diffuse le plus vite.

Les déplacements réduits coïncident parfaitement du côté riche en Au.

Si le couple traité 25 hr présente une dilatation résiduelle négligeable, ce n'est pas le cas pour le couple traité 49 hr. Cette dilatation résiduelle doit être attribuée à des microporosités réparties du côté Ag. Nous voyons qu'elle n'affecte notablement ni le profil de concentration, ni la courbe des déplacements du côté riche en Au.

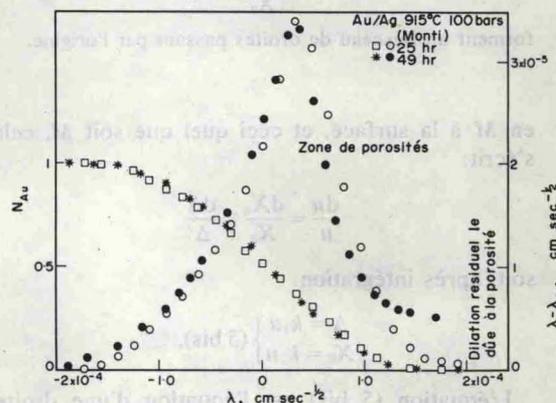


Fig. 3. Courbes concentration-pénétration et profils de déplacement obtenus dans le système Au-Ag à 915°C sous une pression hydrostatique de 100 bars.

- Concentration { 25 h
- Déplacements { 25 h
- × Concentrations { 49 h
- Déplacements { 49 h

## 4. METHODE DE DEPOUILLEMENT

Une nouvelle formulation peut être établie, compte tenu des propriétés mises en évidence.

En particulier, on pourra tracer expérimentalement la courbe,

$$\delta = \frac{\Delta}{\sqrt{t}} = \frac{X - X_0}{\sqrt{t}} \text{ en fonction de } \lambda_0 = \frac{X_0}{\sqrt{t}}$$

La relation établie en [1]

$$X - X_0 \frac{\partial X}{\partial X_0} = F(\lambda_0) \sqrt{t}$$

s'écrit alors:

$$\delta - \lambda_0 \frac{d\delta}{d\lambda_0} = F(\lambda_0). \quad (9)$$

Le calcul de la fonction  $F$ , en tout point de la courbe  $\delta(\lambda_0)$  peut être aisément évité grâce à l'interprétation géométrique très simple de la formule (9) (Fig. 4).

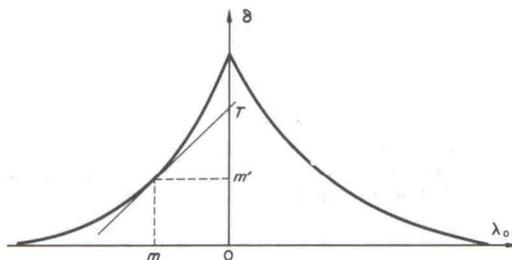


Fig. 4. Schéma permettant le calcul de la fonction  $F$  à partir de la courbe  $\delta(N_0)$ .

La courbe  $\delta(\lambda_0)$  s'obtient facilement, à partir de la courbe  $\delta(\lambda)$  par addition puisque  $\delta = \lambda - \lambda_0$ .

Soit ( $D$ ) la tangente en  $M$  à la courbe  $\delta(\lambda_0)$ . Elle coupe l'axe  $\lambda_0 = 0$  au point  $T$ , la projection du point  $M$  sur cet axe est  $m'$ .

Nous avons:  $Om' = \delta$

$$m'T = -\lambda \frac{d\delta}{d\lambda_0}$$

(au point  $M$  choisi sur la Fig. 1 la pente  $d\delta/d\lambda_0$  est positive et  $\lambda_0$  est négatif). Donc:

$$OT = Om' + m'T = \delta - \lambda_0 \frac{d\delta}{d\lambda_0} = F(\lambda_0).$$

On obtiendra donc directement la quantité  $F$ , correspondant à la valeur  $\lambda_0$ , en prenant l'ordonnée de l'insertion entre la tangente et l'axe  $\lambda_0 = 0$ .

Une construction graphique analogue permet de mesurer  $F(\lambda)$  à partir de la courbe  $\delta(\lambda)$ . Elle est explicitée en Annexe 3.

La mesure de  $F$  correspondant à l'abscisse réduite  $\lambda$  permet d'appliquer la formule de Heumann généralisée, établie dans un article précédent [1].

$$\frac{D_A}{D_B} = \frac{\int_{N_0}^{N_A} \lambda dN_A - N_A F(\delta + \lambda_0)}{\int_{N_0}^{N_A} \lambda dN_A + N_B F(\delta + \lambda_0)}. \quad (10)$$

La connaissance du rapport  $D_A/D_B$ , permet l'accès aux coefficients  $D_A$  et  $D_B$  par la deuxième relation de Darken:

$$\bar{D} = D_A D_B + D_B D_A.$$

Au lieu d'utiliser la formule (10), on peut revenir à la définition de  $F$ :

$$F = 2(D_A - D_B) \frac{dN_A}{d\lambda}$$

et calculer la différence  $D_A - D_B$  après avoir mesuré le gradient de concentration:  $dN_A/d\lambda$ , la fin du calcul étant la même (équation de Darken).

Ces méthodes de détermination des coefficients intrinsèques ont l'avantage de s'appliquer à tout l'intervalle de concentration et de s'affranchir de toute relation empirique.

## 5. CONCLUSION

La mesure de l'effet Kirkendall, dans tout le domaine de concentration d'un couple de diffusion (expérience du type "mille feuilles" ou "interfaces obliques"), permet d'accéder aux coefficients intrinsèques sans qu'il soit nécessaire de faire varier la durée des recuits; si l'on porte pour une durée quelconque  $t$  les valeurs  $\Delta/\sqrt{t}$  ( $\Delta$  déplacement d'un repère); en fonction des valeurs de  $\lambda = X/\sqrt{t}$  ( $x$  position du repère, à l'instant  $t$ ), l'on doit obtenir une courbe indépendante de la durée du recuit. Cette courbe permet de calculer la quantité  $F = 2(D_A - D_B) dN_A/d\lambda$  qui confrontée à la courbe concentration—pénétration en variable réduite, donnera accès aux valeurs de  $D_A$  et  $D_B$ .

De même que l'invariance de la courbe  $N_A(\lambda)$  est un critère d'utilisation de l'équation de Fick ( $D$ , coefficient de diffusion chimique, indépendant de la durée du recuit), nous avons désormais un critère pour l'utilisation des équations de Darken: la fonction  $F(\lambda)$ , calculée d'après la courbe expérimentale  $(X - X_0)/\sqrt{t} = FX/\sqrt{t}$  doit être indépendante du temps.

Une vérification faite d'après les résultats expérimentaux obtenus par Monti[3] dans le système Au/Ag s'avère très satisfaisant, ce qui confirme d'une façon éclatante la validité du formalism de Darken (Fig. 3).

#### BIBLIOGRAPHIE

1. Cornet J. F. et Calais D., *J. Phys. Chem. Solids* 33, 1675 (1972).
2. Philibert J. et Levasseur K., *Phys. Status Solidi* 21, K1 (1967).
3. Monti C., thèse, Orsay, Juin (1972)

#### ANNEXE 1

L'équation (5) caractérise la fonction:

$$X - X_0 = \Delta(X_0, \sqrt{t}).$$

On aurait pu obtenir une équation de la même forme avec la fonction

$$X - X_0 = \delta(X, \sqrt{t}) \text{ soit}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \sqrt{t}} \Big|_X d\sqrt{t} + \frac{\partial \delta}{\partial X} \Big|_{\sqrt{t}} dx = \delta. \quad (1.5)$$

En effet l'équation (6) s'écrit:

$$\lambda - \lambda_0 = \Phi(\lambda_0)$$

$$\text{d'où } \lambda = \lambda_0 + \Phi(\lambda_0) = \Phi'(\lambda_0).$$

$$\text{Soit } \lambda_0 = \Phi' - 1(\lambda) \text{ (}\Phi'^{-1} \text{ inverse de } \Phi').$$

D'où:

$$\lambda - \lambda_0 = \Phi(\lambda_0) = \Phi(\Phi'^{-1}(\lambda)) = \varphi(\lambda)$$

en posant  $\varphi = \Phi \cdot \Phi'^{-1}$ .

#### ANNEXE 2

Soient:

$$\lambda = \frac{X}{\sqrt{t}} = \frac{X}{u} \quad (2.1)$$

$$\lambda_0 = \frac{X_0}{\sqrt{t}} = \frac{X_0}{u}. \quad (2.2)$$

Par différenciation nous avons:

$$d\lambda = \frac{1}{u} dX - \frac{X}{u^2} du \quad (2.3)$$

$$d\lambda_0 = \frac{1}{u} dX_0 - \frac{X_0}{u^2} du. \quad (2.4)$$

Mais l'abscisse  $x$  doit être considérée comme une fonction de la racine carrée du temps  $u$  et de l'abscisse initiale

$$dx = \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial X_0} dX_0 \quad (2.5)$$

où

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial \Delta}{\partial u} = p \text{ et } \frac{\partial X}{\partial X_0} = \frac{\partial \Delta}{\partial X_0} + 1 = g + 1$$

(2.5) s'écrit donc:

$$dX = p du + (1+g) dX_0 \quad (2.6)$$

Reportons la valeur de  $dx$  calculée en (2.6) dans l'expression (2.3), il vient:

$$d\lambda = \frac{p du}{u} - \frac{X du}{u^2} + \frac{1+g}{u} dX_0$$

ou

$$d\lambda = (1+g) \left[ \frac{1}{u} dX_0 + \frac{pu - X}{1+g} \frac{1}{u^2} du \right]$$

or d'après (5)  $\Delta = X - X_0 = pu + gX_0$

$$\text{ou } X - pu = (g+1)X_0$$

d'où:

$$d\lambda = (1+g) \left[ \frac{1}{u} dX_0 - \frac{X_0}{u^2} du \right]. \quad (2.7)$$

Le terme entre crochets s'identifie à l'expression de  $d\lambda_0$ , calculée en (2.4):

$$d\lambda = (1+g) d\lambda_0. \quad (2.8)$$

#### ANNEXE 3

L'équation différentielle liant  $\lambda$  et  $\lambda_0$  s'écrit:

$$\lambda - \lambda_0 \frac{d\lambda}{d\lambda_0} = F. \quad (3.1)$$

Par introduction de  $\delta = \lambda - \lambda_0$  on obtient la même équation:

$$\delta - \lambda_0 \frac{d\delta}{d\lambda_0} = F. \quad (3.2)$$

En fonction de  $\lambda$ , on remplace  $d\delta/d\lambda_0$  par le produit  $d\delta/d\lambda \cdot d\lambda/d\lambda_0$ , le terme  $\lambda_0(d\lambda/d\lambda_0)$ , qui apparaît ainsi dans (3.2) sera remplacé par  $\lambda - F$  d'après (3.1).

$$\delta - (\lambda - F) \frac{d\delta}{d\lambda} = F. \quad (3.3)$$

L'interprétation géométrique de la relation (3.3) est simple:  $F$  est l'abscisse (ou l'ordonnée) de l'intersection entre la tangente à la courbe et la première bissectrice, comme le montre le schéma Fig. 5.

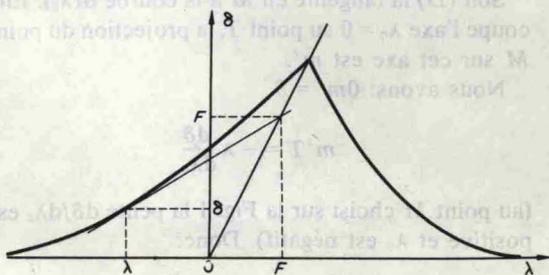


Fig. 5. Schéma permettant le calcul de la fonction  $F$  à partir de la courbe  $\delta(N)$ .